Propriété des matrices inversibles

Propriété: *Toute matrice inversible admet pour inverse une infinité de polynôme de cette matrice:*
Soit $A \in GL_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ *, P le polynôme (annulateur) minimal de A et Q un polynôme quelconque de valuation nulle. On note* $Q(X) \cdot P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i \cdot X^i$

On a alors: $A^{-1} = -\sum_{i=1}^{k} (\frac{p_i}{p_0}) \cdot A^{i-1}$

Démonstration:
1ère étape: Montrons que $p_0 = Q(0) \cdot P(0) \neq 0$

$p_0 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} Q(0)=0 \\ ou \\ P(0)=0 \end{matrix}$ or Q est un polynôme dont le terme de degré 0 est non nul donc

$p_0 = 0 \Rightarrow P(0) = 0$ or si le terme constant de P est nul alors soit la matrice est la matrice nulle (et donc non inversible) soit P n'est pas le polynôme minimal (par simplification). ABSURDE
donc $p_0 = Q(0) \cdot P(0) \neq 0$

2ème étape:
Posons: $B = -\sum_{i=1}^{n} (\frac{p_i}{p_0}) \cdot A^{i-1}$

On a alors: $A \cdot B = -\sum_{i=1}^{n} (\frac{p_i}{p_0}) \cdot A^i = B \cdot A$

Soit $A \cdot B = \frac{-1}{p_0} \cdot (Q(A).P(A) - p_0 \cdot I_n) = B \cdot A$ or par définition: $P(A) = 0$

D'où $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ or une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible a droite ou inversible à gauche.
Donc $B = A^{-1}$ **C.Q.F.D.**

Exemple d'application:
Enoncé:

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}

Solution:

$$\chi(A) = (1-A)^4 \Rightarrow A^{-1} = 4\mathrm{I}_n - 6\mathrm{A} + 4\mathrm{A}^2 - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$